فرآیندهای تصادفی
زنجیره مارکوف زمان پیوسته

محسن هوشمند
دانشکده تکنولوژی اطلاعات و علم رایانه
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

زنجیره مارکوف زمان پیوسته

مدل‌سازی فرایند در زمان پیوسته

- انتشار بیماری
- تعداد تماس‌های تلفنی
- زمان خرابی قطعات الکتریکی یا مکانیکی

زنجیره مارکوف زمان پیوسته

زنجیره مارکوف زمان پیوسته $\{X(t): 0 \le t < \infty\}$

- دارای مجموعه حالت‌های متناهی یا شمارا و خاصیت مارکوفی

$$P(X(t+s) = j | X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \le u \le s) = P(X(t+s) = j | X(s) = i)$$

- همگن یا

$$P(X(t+s) = j | X(s) = i) = P(X(t) = j | X(0) = i)$$

پس نمایش با

- $P_{ij}^{(t)}$ یا ماتریس احتمال‌های انتقال $P^{(t)}$
  - مقایسه با حالت گسستهٔ P_{ij} یا P
  - پس $P^{(t)}$ خانواده‌ای از ماتریس‌ها (معمولا بی‌نهایت ماتریس)

زنجیره مارکوف زمان پیوسته

$$P(t)\underline{\text{۱}} = \underline{\text{۱}}$$

$$P^{(0)} =?= \lim_{t \to 0^+} P^{(t)} = I$$

زمان اقامت زم زمان‌پیوسته (زم‌زپ)

زمان ماندن در حالت j قبل از انتقال به حالتی غیر از آن

طبق معادلهٔ صفحهٔ قبل

- احتمال انتقال از j به حالت دیگر ناوابسته به مدت زمان ماندن در حالت j
- به دیگر سخن، صدق‌پذیری زمان اقامت از خاصیت بی‌حافظگی
- تنها توزیع پیوستهٔ صدق‌پذیر در خاصیت مذکور
  - توزیع نمائی

زمان اقامت زم زمان‌پیوسته (زم‌زپ)

زمان اقامت s_j در حالت j در زم‌زپ متغیرهای تصادفی با توزیع نمایی و مستقل آماری با چگالی

$$p_{s_j}^{(a)} = q_j e^{-q_j a}, a \geq 0$$

- به طوری که

$$q_j = \frac{1}{E[s_j]}$$

- اثبات-
- $X(t_1, t_2) = j$
  - نمایش‌گر ماندن در حالت j در زمان $[t_1, t_2]$
- احتمال اینکه زمان اقامت بیشتر از a
  - $p(s_j > a) = p[X(0,a) = j | X(0) = j, X(0^-) \neq j]$
  - بنابر خاصیت مارکوفی
  - $p(s_j > a) = p[X(0,a) = j | X(0) = j\,]$

زمان اقامت زم زمان‌پیوسته (زم‌زپ)

- برای $a \geq 0$ و $\mathrm{b} > 0$
  - $p(s_j > a + b) = p[X(0,a+b) = j | X(0) = j\,]$
  - تقسیم به دو بازهٔ ناهم‌پوشا
  - $p(s_j > a + b) = p[X(a,a+b) = j, X(0,a) = j | X(0) = j\,]$
  - استفاده از احتمال شرطی
  - $p(s_j > a + b) = p[X(a,a+b) = j | X(0,a) = j, X(0) = j\,]p[X(0,a) = j | X(0) = j\,]$
  - خاصیت مارکوفی
  - $p(s_j > a + b) = p[X(a,a+b) = j | X(a) = j\,]p[X(0,a) = j | X(0) = j\,]$
  - با استفاده از $p(s_j > a) = p[X(0,a) = j | X(0) = j\,]$
  - $p(s_j > a + b) = p[s_j > b]p[s_j > a]$
    - مشابه خاصیت بی‌حافظگی
      - پس زمان اقامت دارای توزیع نمائی

زمان اقامت زم زمان‌پیوسته (زم‌زپ)

- زمان اقامت باقی‌مانده در حالت j و نمایش با s'_j
  - زمان باقی ماندن در حال j با مشاهدهٔ بودن در حالت مذکور در زمان t
  - $p(s'_j > a) = p[X(t,a) = j | X(t) = j\,]$
  - بنابر خاصیت بی‌حافظگی توزیع نمائی زمان اقامت s_j
    - زمان اقامت باقی‌مانده دارای توزیع نمایی یکسان
    - $p_{s_j}^{(a)} = p_{s'_j}^{(a)} = q_j e^{-q_j a}, a \geq 0$

زمان اقامت زم زمان‌پیوسته (زم‌زپ)

- شهود
  - زمان اقامت در حالت j برابر با تمایل فرایند به ماندن در حالت مذکور
  - بنابراین محتملا وابسته با احتمال انتقال $P_{jj}^{(t)}$

قضیه- $P_{jj}^{(h)}$ در بازهٔ کوچک h در زم‌زپ برابر است با

$$P_{jj}^{(h)} = P[s_j > h] + o(h) = 1 - q_j h + o(h)$$

به طوری که $q_j = \frac{1}{E[s_j]}$ ضریب توزیع نمائی زمان اقامت در حالت j و $\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$

زمان اقامت زم زمان‌پیوسته (زم‌زپ)

$$P_{jj}^{(h)} = P[s_j > h] + o(h) = 1 - q_j h + o(h)$$

اثبات-

- فرایندی در حالت j در زمان 0
- مشاهدهٔ دوباره در زمان h در حالت مذکور در صورت
  - یا عدم تغییر حالت در بازه زمان $[0,h]$
  - یا انجام چند تغییر حالت که آخرین همراه با برگشت به حالت j
  - قانون احتمال کل

$$P_{jj}^{(h)} = P[X(h) = j|X(0) = j] = P[s_j > h] + P[X(h) = j, s_j \leq h|X(0) = j]$$

زمان اقامت زم زمان‌پیوسته (زم‌زپ)

$$P\big[X(h) = j, s_j \leq h | X(0) = j\big]$$

قانون احتمال کل

$$P_{چ} = P\big[X(h) = j, s_j \leq h | X(0) = j\big] = \int_0^h p_{s_j}(a) P\big[X(h) = j | X(0) = j, s_j = a\big] da$$

$$p_{s_j}^{(a)} = q_j e^{-q_j a}, a \geq 0$$

- i نمایش حالت ورودی پس از خروج از j

$$P_{چ} = \int_0^h p_{s_j}(a) \sum_{i \neq j} P\big[X(h) = j, X(a) = i | X(0) = j, s_j = a\big]\, da$$

$$= \int_0^h p_{s_j}(a) \sum_{i \neq j} P[X(h) = j | X(a) = i] P\big[X(a) = i | X(0) = j, s_j = a\big]\, da$$

$$= \int_0^h p_{s_j}(a) \sum_{i \neq j} P_{ij}(h-a) P\big[X(a) = i | X(0) = j, s_j = a\big]\, da$$

$$P_{ij}(h-a) \leq P[s_i \leq h-a]$$

$$P_{چ} \leq \int_0^h p_{s_j}(a) \sum_{i \neq j} P[s_i \leq h-a]\, P\big[X(a) = i | X(0) = j, s_j = a\big]\, da$$

زمان اقامت زم زمان‌پیوسته (زم‌پ)

$$P_{چ} \leq \int_0^h p_{s_j}(a) \sum_{i\neq j} P[s_i \leq h-a]\, P\big[X(a)=i|X(0)=j, s_j=a\big]\, da$$

جاگذاری

$$P_{چ} \leq \int_0^h q_j e^{-q_j a} \sum_{i\neq j} \left(1-q_j e^{-q_i(h-a)}\right) P\big[X(a)=i|X(0)=j, s_j=a\big]\, da$$

$$= \int_0^h q_j e^{-q_j a} da \sum_{i\neq j} P\big[X(a)=i|X(0)=j, s_j=a\big] - \sum_{i\neq j} P\big[X(a)=i|X(0)=j, s_j=a\big] e^{-q_i h} q_j \int_0^h e^{-(q_j-q_i)a} da$$

$$P_{چ} \leq \left(1-e^{-q_j h}\right) - \sum_{i\neq j} P\big[X(a)=i|X(0)=j, s_j=a\big] e^{-q_i h} \frac{q_j}{q_j-q_i} + \sum_{i\neq j} P\big[X(a)=i|X(0)=j, s_j=a\big] e^{-q_j h} \frac{q_j}{q_j-q_i}$$

استفاده از سری تیلور

$$P_{چ} \leq q_j h - q_j h \sum_{r\neq j} P\big[X(a)=r|X(0)=j, s_j=a\big] + o(h)$$

$$\sum_{i\neq j} P\big[X(a)=i|X(0)=j, s_j=a\big] = ۱$$

$$P\big[X(h)=j, s_j \leq h|X(0)=j\big] = o(h)$$

زمان اقامت زم زمان‌پیوسته (زم‌زپ)

$$P[s_j > h] = e^{-q_j h} = 1 - q_j h + o(h)$$

- حکم برقرار است
- در زمان کوتاه، فرایند یا انتقالی نخواهد داشت یا حداکثر یک انتقال
  - موارد بیشتر از دو ناچیز است

معادلات چپمن-کولموگروف زمزپ

احتمال‌های انتقال در زمان پیوسته

معادلات چپمن-کولموگرف

- *ماتریس انتقال در بازهٔ $t+s$ هر جفت مقدار نامنفی t و s برابر است با* $P^{(t+s)} = P^{(t)}P^{(s)}$

$$\sum_k P_{ik}^{(t)} P_{kj}^{(s)} = P_{ij}^{(t+s)}$$

اثبات- مشابه حالت گسسته

- تمرین

نتیجه $P^{(0)} = I$

ماتریس مولد بی‌نهایت کوچک

در حالت گسسته P

- معادل حالت پیوسته Q

Q ماتریس حقیقی مستقل از زمان t

- مولد سخت‌ناچیز یا مولد بین‌نهایت کوچک یا مولد بسیارکم
- یا ماتریس چگالی و شدت
- تعریف

$$Q = \lim_{h \to 0^+} \frac{P^{(h)} - I}{h}$$

ماتریس مولد بی‌نهایت کوچک

$$Q = \lim_{h \to 0^+} \frac{P^{(h)} - I}{h}$$

Q ماتریس حقیقی مستقل از زمان t

- مسئله- آیا ماتریس مربوط وجود دارد؟ فرض می‌کنیم وجود دارد.
- مسئله- آیا ماتریس تصادفی است؟ خیر

ماتریس مولد بی‌نهایت کوچک

$$Q = \lim_{h\to 0^+} \frac{P^{(h)} - I}{h}$$

$$q_{jj} = \lim_{h\to 0^+} \frac{P_{jj}^{(h)} - ۱}{h}$$

ویژگی‌های q_{jj}

- همگی منفی
- تغییر علامت

$P_{jj}^{(h)} = P[s_j > h] + o(h) = 1 - q_j h + o(h)$

$$-q_{jj} = \lim_{h\to 0^+} \frac{۱ - P_{jj}^{(h)}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{q_j h + o(h)}{h} = q_j$$

- پس بازنویسی معادله احتمال بازگشت به خود

$$P_{jj}^{(h)} = P[s_j > h] + o(h) = 1 + q_{jj} h + o(h)$$

آمیزش درایه‌های قطر اصلی با احتمال انتقال به خود

ماتریس مولد بی‌نهایت کوچک

$$Q = \lim_{h \to 0^+} \frac{P^{(h)} - I}{h}$$

$$\forall i \neq j: q_{ij} = \lim_{h \to 0^+} \frac{P_{ij}^{(h)}}{h}$$

بازنویسی

$$P_{ij}^{(h)} = q_{ij}h + o(h), i \neq j$$

ماتریس مولد بی‌نهایت کوچک

$$\mathrm{P(t)}\underline{\text{١}} = \underline{\text{١}}$$

$$Q\underline{\text{١}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{P^{(h)}\underline{\text{١}} - I\underline{\text{١}}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\underline{\text{١}} - \underline{\text{١}}}{h} = 0^T$$

- به دیگر سخن

$$\sum_{j=0}^{N} q_{ij} = 0$$

در نتیجه

$$\sum_{j\neq i}^{N} q_{ij} = -q_{ii} = q_i$$

ماتریس مولد بی‌نهایت کوچک

مقدار q_{ij} همیشه متناهی

مقدار q_{ii} ممکن است متناهی یا نامتناهی

- $q_i = \infty$
  - حالت آنی
    - زیرا زمان اقامت در این حالت برابر ۰ با احتمال ۱
- $q_i < \infty$
  - حالت پایستار
  - اگر $q_i = 0$
    - امید ریاضی زمان اقامت در حالت j برابر بی‌نهایت
      - چرا؟
      - حالت جذب‌کننده
      - فرایند پس از اولین ورود به حالت هرگز خارج نخواهد شد

معادلات کولموگروف

تعریف مشتق ماتریس انتقال

$$\frac{dP^{(t)}}{dt} = \lim_{h\to 0^+} \frac{P^{(t+h)} - P^{(t)}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{P^{(t)}P^{(h)} - P^{(t)}}{h}$$

$$\frac{dP^{(t)}}{dt} = \lim_{h\to 0^+} \frac{P^{(t)}(P^{(h)} - I)}{h}$$

$$\frac{dP^{(t)}}{dt} = P^{(t)} \lim_{h\to 0^+} \frac{(P^{(h)} - I)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(P^{(h)} - I)}{h} P^{(t)}$$

$$\frac{dP^{(t)}}{dt} = P^{(t)}Q = QP^{(t)}$$

معادلات کولمولگروف

دو معادلهٔ دیفرانسیلی

$$\frac{dP^{(t)}}{dt} = P^{(t)}Q = QP^{(t)}$$

معادلهٔ کولمولگروف پس‌رو

$$P'^{(t)} = QP^{(t)}$$

معادلهٔ کولمولگروف پیش‌رو

$$P'^{(t)} = P^{(t)}Q$$

دارای نتایج متعدد

معادلات کولموگروف

$$P^{(t)} = e^{Qt}, t \geq 0$$

$$e^{Qt} = I + \sum_{i=1}^{n} \frac{Q^n t^n}{m!}$$

$$P^{(t)} = e^{Qt} = \underset{n\to\infty}{\text{حد}} \left(1 + \frac{Qt}{n}\right)^n$$

مثال

خدمت‌رسانی- یا آمادهٔ خدمت (بیکار) یا مشغول $X(t)$ یا صفر یا یک

بازه‌های بیکار و مشغول داراهی زمان‌های تصادفی متفاوت و مستقل از هم با توزیع نمائی λ و μ

احتمال انتقال از بیکار به مشغول در بازهٔ کوچک h

$$P_{0,۱}(h) = P[s_0 \leq h] + o(h) = ۱ - e^{-\lambda h} + o(h) = \lambda h + o(h)$$

احتمال انتقال از مشغول به بیکار در بازهٔ کوچک h

$$P_{۱,0}(h) = P[s_۱ \leq h] + o(h) = ۱ - e^{-\mu h} + o(h) = \mu h + o(h)$$

مقایسه با $P_{ij}^{(h)} = q_{ij}h + o(h), i \neq j$

- $X(t)$ زم‌زپ با ماتریس مولد

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

مثال

معادلات پیش‌رو

$$\begin{bmatrix} P'_{0,1}(t) & P'_{0,۱}(h) \\ P'_{۱,0}(t) & P'_{۱,۱}(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{0,0}(t) & P_{0,۱}(t) \\ P_{۱,0}(t) & P_{۱,۱}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

یا

$$\begin{cases} P'_{0,0}(t) = -\lambda P_{0,0}(t) + \mu P_{0,۱}(t) \\ P'_{0,۱}(t) = \lambda P_{0,0}(t) - \mu P_{0,۱}(t) \\ P'_{۱,0}(t) = -\lambda P_{۱,0}(t) + \mu P_{۱,۱}(t) \\ P'_{۱,۱}(t) = \lambda P_{۱,0}(t) - \mu P_{۱,۱}(t) \end{cases}$$

داریم $P_{0,۱}(t) = ۱ - P_{0,0}(t)$ و $P_{۱,0}(t) = ۱ - P_{۱,۱}(t)$، پس

$$\begin{cases} P'_{0,0}(t) = -\lambda P_{0,0}(t) + \mu P_{0,۱}(t) \\ P'_{۱,۱}(t) = \lambda P_{۱,0}(t) - \mu P_{۱,۱}(t) \end{cases}$$

به دلیل تقارن تنها کافی است معادلهٔ نخست حل شود

مثال

$$\begin{cases} P'_{0,0}(t) = -\lambda P_{0,0}(t) + \mu P_{0,١}(t) \\ P'_{١,١}(t) = \lambda P_{١,0}(t) - \mu P_{١,١}(t) \end{cases}$$

معادله دیفرانسیلی درجه اول، ناهمگن، خطی

$$g'^{(t)} = -\alpha g(t) + \beta, t \geq 0$$

با پاسخ

$$g(t) = c(t)e^{-\alpha t}$$

با جایگذاری پاسخ در معادله دیفرانسیلی

بر قرار بودن $P_{0,0}(0) = ١$

$$P_{0,0}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

زنجیره مارکوف درونه‌ای

زم‌زپ

- در حالتی با نام ۱ در مدتی زمانی تصادفی
  - سپس در حالت ۲ با زمانی تصادفی مطابق توزیع نمائی
  - به همین ترتیب
  - پس رسیدن به دنباله‌ای از حالت‌ها ... ,۱,۲,۳
    - درونه در فرایند اصلی
    - بسط گسسته (باز زمان تصادفی)

زنجیره مارکوف درونه‌ای

$\bar{X}_n$

- زمان ماندن در حالت n قبل از به حالت n+1
- در صورت نبودن حالت جذب‌کننده
  - آنگاه متغیر تصادفی به مثابهٔ زمزگ
  - زم درونه‌ای

$\bar{P}$ ماتریس احتمال‌های انتقال

- امکان محاسبه با ماتریس مولد سخت‌ناچیز
- $\bar{P}_{ij}$ صرفا زمان حرکت از حالتی به حالت دیگر
  - $\bar{P}_{ii}$ برابر صفر مگر اینکه حالت جذب باشد

$$\forall i \neq j: \bar{P}_{ij} = \underset{h\to 0^+}{\text{حد}} P[X(t+h) = j | X(t+h) \neq i, X(t) = i]$$
$$= \underset{h\to 0^+}{\text{حد}} P[X(t+h) = j | X(t+h) \neq i, X(t) = i]$$

$$\forall i \neq j: \bar{P}_{ij} = \underset{h\to 0^+}{\text{حد}} P[X(t+h) = j | X(t+h) \neq i, X(t) = i]$$
$$= \underset{h\to 0^+}{\text{حد}} \frac{P[X(t+h) = j, X(t+h) \neq i, X(t) = i]}{P[X(t+h) \neq i, X(t) = i]}$$

مشاهده $X(t+h) \neq i$ شامل $X(t+h) = j$ پس

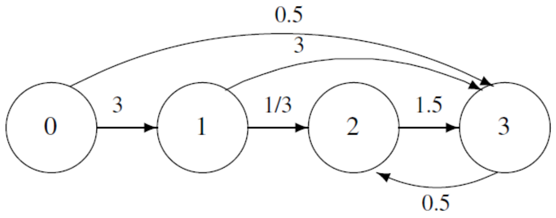
$$\frac{P[X(t+h) = j, X(t) = i]}{P[X(t+h) \neq i, X(t) = i]} = \frac{P[X(t+h) = j | X(t) = i] P[X(t) = i]}{P[X(t+h) \neq i | X(t) = i] P[X(t) = i]}$$
$$= \frac{P_{ij}(h)}{۱ - P_{ii}(h)}$$
$$\bar{P}_{ij} = \underset{h\to 0^+}{\text{حد}} \frac{P_{ij}(h)}{۱ - P_{ii}(h)} = \underset{h\to 0^+}{\text{حد}} \frac{P_{ij}(h)/h}{(۱ - P_{ii}(h))/h} = \frac{q_{ij}}{q_i}$$
$$q_{ij} = q_i \bar{P}_{ij}$$

نمودار جریان زمزپ

امکان نمایش احتمال‌های انتقال بین حالت‌ها در زمزگ با استفاده از نمودار انتقال

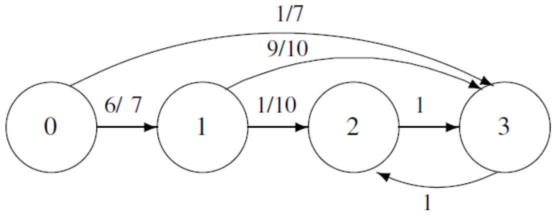
- به طریق اولی مشابه نمودار انتقال جهت نمایش ماتریس مولد سخت‌تاچیز Q
  - نمودار جریان
- عدم نمایش بازگشت به خودها
- نمایش یکسان نمودار جریان Q با نمودار انتقال $\bar{P}$

نمودار جریان



$$
Q = \begin{bmatrix} -3.5 & 3 & 0 & 0.5 \\ 0 & -10/3 & 1/3 & 3 \\ 0 & 0 & -1.5 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}
$$

نمودار انتقال



$$
\tilde{P} = \begin{bmatrix} 0 & 6/7 & 0 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1/10 & 9/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

احتمال حالت زمزپ

تابحال احتمال شرطی

$$p_j(t) = P[X(t) = j]$$

$$\boldsymbol{p}(t) = [p_0(t), p_١(t), \dots, p_N(t)]^T$$

$$\sum_{i=0}^{N} p_j(t) = \boldsymbol{p}(t)^T\,\boldsymbol{1} = 1$$

$$p_j(t) = P\left[X(t) = j, \bigcup_i \{X(s) = i\right] = P\left[\bigcup_i \{X(t) = j, X(s) = i\right], 0 < s < t$$

$$p_j(t) = \sum_i P[X(t) = j | X(s) = i]\, P[X(s) = i]$$

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{s})P(t - s), 0 < s < t$$

$$s = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(0)P(t)$$

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(0)e^{Qt}$$

احتمال حالت زمزپ

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(0)e^{Qt}$$

$$\boldsymbol{p}'(t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\boldsymbol{p}(t+h) - \boldsymbol{p}(t)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\boldsymbol{p}(t)\boldsymbol{p}(h) - \boldsymbol{p}(t)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\boldsymbol{p}(t)(\boldsymbol{p}(h) - I)}{h} = \boldsymbol{p}(t) \lim_{h\to 0^+} \frac{(\boldsymbol{p}(h) - I)}{h}$$

$$\boldsymbol{p}'(t) = \boldsymbol{p}(t)Q$$

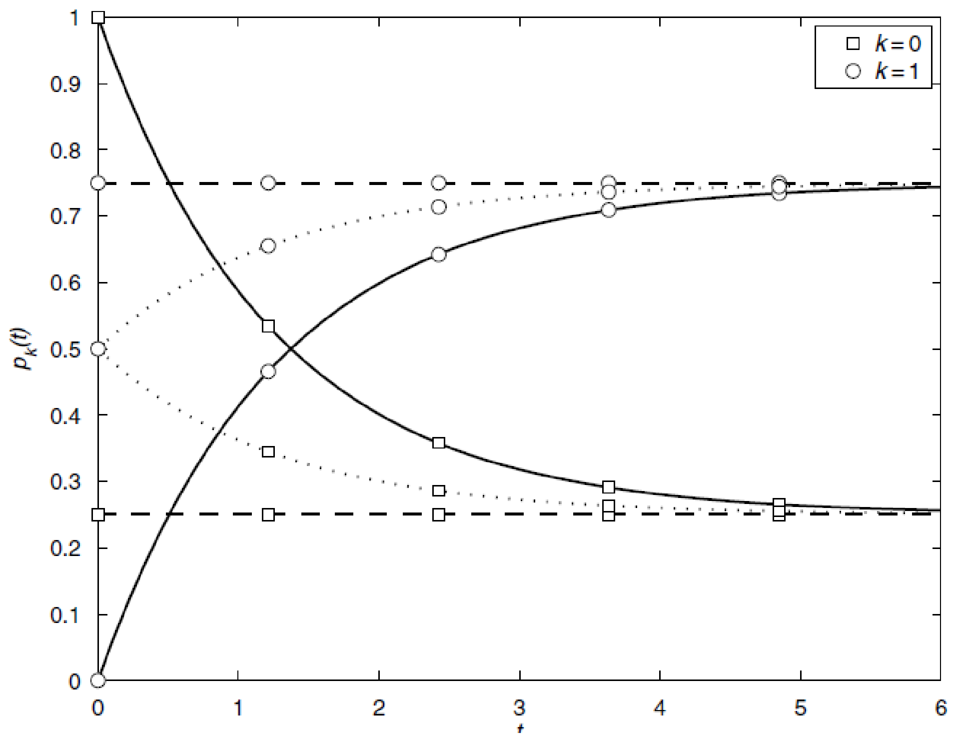
در قالب تک عددی

$$p_j(t) = \sum_{i=0, i\neq j}^{N} p_i(t)q_{ij} - p_j(t)q_j$$

مشهور به معادلات تعادل

تشبیه جریان سیال

مثال



$$P_{0,0}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$
$$P_{0,۱}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$
$$P_{۱,0}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$
$$P_{۱,۱}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

با داشتن $p(0) = [p_0(0), p_۱(0)]$

$$p_0(t) = p_0(0)P_{0,0}(t) + p_۱(0)P_{۱,0}(t)$$
$$p_۱(t) = ۱ - p_0(t)$$

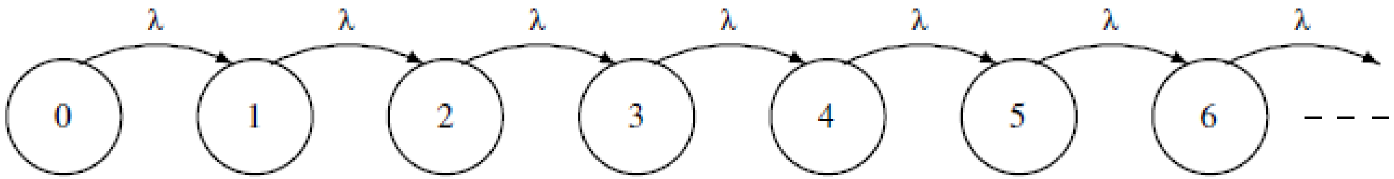
پس

$$p_0(t) = p_0(0)e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

مثال

فرض صرفا رفتن از حالتی به حالت یک واحد افزایشی و شدت انتقال برابر λ

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$



- *معادلات تعادل*
  - $p'_0(t) = -\lambda p_0(t)$
  - $p'_j(t) = \lambda p_{j-1}(t) - \lambda p_j(t)$

مثال

- معادلات تعادل
  - $p'_0(t) = -\lambda p_0(t)$
  - $p'_j(t) = \lambda p_{j-۱}(t) - \lambda p_j(t)$
- استفاده از معادلهٔ کمکی جهت حل دستگاه معادلات دیفرانسیلی

$$g_j(t) = e^{\lambda t} p_j(t); j = 0, ۱, ۲, \ldots$$

مشتق آن

$$g'_j(t) = \lambda e^{\lambda t} p_j(t) + e^{\lambda t} p'_j(t)$$

- جاگذاری معادلات دیفرانسیلی در مشتق
  - $j = 0$

$$g'_0(t) = \lambda e^{\lambda t} p_0(t) - \lambda e^{\lambda t} p_0(t) \Longrightarrow g'_0(t) = 0$$

  - $j \geq ۱$

$$g'_j(t) = \lambda e^{\lambda t} p_j(t) + \lambda e^{\lambda t} p_{j-۱}(t) - \lambda e^{\lambda t} p_j(t) \Longrightarrow g'_j(t) = \lambda g_{j-۱}(t)$$

  - با فرض X(0)=0 داریم $p_0(0) = ۱$ و $p_j(0) = 0$. پس با $g_j(t) = e^{\lambda t} p_j(t)$ خواهیم داشت: $g_0(0) = ۱$ و $g_j(0) = 0$ و $g_0(t) = ۱$ و در نتیجه

$$g_۱(t) = \lambda t, g_0(t) = \frac{(\lambda t)^۲}{۲!}, \ldots, g_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} \Longrightarrow p_j(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

رده‌بندی زم‌زپ

حالت‌های دسترس‌پذیر و ارتباطی

کاهش‌ناپذیر

بازگشت

گذرا

بازگشت مثبت

بازگشت پوچ

تناوب و غیرمتناوب بی‌معنی در وضعیت پیوسته

رده‌بندی زمزپ

حالت‌های دسترس‌پذیر و ارتباطی

- j از i دسترس‌پذیر اگر برای t خاصی $P_{ij}(t) > 0$
- ارتباط دو حالت اگر هر از یکدیگر دسترس‌پذیر

رده‌های ارتباطی

- القای افراز حالت‌ها به رده‌های هم‌ارزی
  - رده بسته
  - رده باز
- کاهش‌ناپذیر
  - اگر تمامی حالت‌ها متعلق به یک رده ارتباطی
  - درغیر این‌صورت کاهش‌پذیر

بازگشت

- اگر احتمال بازگشت به i با شروع از آن برابر ۱
- گذرا در غیرصورت بالا

رده‌بندی زم‌زپ

میانگین زمان بازگشت

اگر کمتر از بی‌نهایت و یا متناهی بازگشت مثبت

اگر بی‌نهایت بازگشت پوچ

سوال- زم‌زپ با رده کاهش‌ناپذیر با تعداد حالت متناهی

- همگی بازگشتی مثبت

رفتار حدی زمزپ

احتمال حالت-پایدار حالت j

$$\pi_j = \lim_{t \to \infty} P[X(t) = j] = \lim_{t \to \infty} p_j(t)$$

قضیه

- زمزپ کاهش‌ناپذیر همیشه دارای احتمال‌های حدی است و مستقل از از بردار شروع احتمالی است. یکی از دو مورد زیر برقرار خواهد بود
  - اگر فرایند گذرا یا بازگشتی پوچ $\pi_j = 0$
  - اگر فرایند بازگشتی مثبت $\pi_j > 0$

رفتار حدی زمزپ

عدم تغییر مقدار احتمال حالت-پایدار حالت j با گذر زمان

- پس مشتق آن برابر صفر

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{p}'(t) = \mathbf{0}$$

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{p}'(t) = \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{t})Q = \boldsymbol{p}(\infty)Q = \mathbf{0}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\pi}Q = \mathbf{0}$$

تک مقدار عددی

$$\pi_j q_j = \sum_{i=0, i\neq j}^{N} \pi_i q_{ij}$$

معادله تعادل حالت پایدار

رفتار حدی زمزپ

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi} Q = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\pi}\mathbf{1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_0 q_0 = \sum_{i=0, i\neq 0}^{N} \pi_i q_{i0} \\ \pi_۱ q_۱ = \sum_{i=0, i\neq ۱}^{N} \pi_i q_{i۱} \\ \vdots \\ \pi_j q_j = \sum_{i=0, i\neq j}^{N} \pi_i q_{ij} \\ \vdots \\ \pi_N q_N = \sum_{i=0, i\neq N}^{N} \pi_N q_{iN} \\ \sum_{j=0}^{N} \pi_j = ۱ \end{cases}$$

رفتار حدی زمزپ

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = P(\infty) = \mathbf{1}\boldsymbol{\pi}^T = \begin{bmatrix} \pi_۱ & \pi_۲ & \dots & \pi_N \\ \pi_۱ & \pi_۲ & \dots & \pi_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \pi_۱ & \pi_۲ & \dots & \pi_N \end{bmatrix}$$

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j$$

فرایندهای زاد و مرگ

فرایند زاد و مرگ

نوعی خاص در خانوادهٔ زم‌زپ‌ها

ابزاری مهم و مفید
- اس و اساس نظریهٔ صف

در زمان t فرایند در حالت n
- به دیگر سخن، $X(t)$ تعداد اعضای جمعیت در زمان t
- حرکت به یکی از همسایه‌های $n-1$ یا $n+1$
  - زاد- از n به $n+1$
  - مرگ- از n به $n-1$
- مشابه؟ پیوستهٔ گام تصادفی
- محدود نبودن حوزه به جمعیت‌های زیستی
- تغییر جمعیت از صفر تا بی‌نهایت
  - معمولا محدود کردن جمعیت به N
  - مثال- فرزم با جمعیت نامحدود مدلی مناسب برای رده‌ای خاص از سیستم‌های صف M/M/m
  - مثال- فرزم با جمعیت محدود مدلی مناسب برای رده‌ای خاص از سیستم‌های صف M/M/m/K

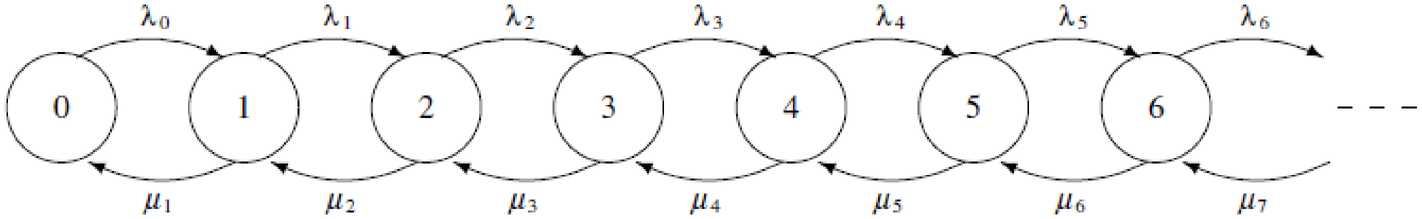
فرایند زاد و مرگ

- ارزیابی فزم در بازه‌های به اندازهٔ کافی کوچک h

اصول

فرض $X(t)$ فرایندی مارکوفی با حالت‌های $0,1,2,\ldots$ و احتمال‌های انتقال ایستای $P_{ij}(t)$ و
$P_{ij}(t) = P\{X(t+u) = j | X(u) = i\}, \forall s \geq 0$

- الف) $P_{ii+1}(h) = \lambda_i h + o(h)$
  - دقیقا یک زاد در بازهٔ $[t,t+h]$
- ب) $P_{ii-1}(h) = \mu_i h + o(h)$
  - دقیقا یک مرگ در بازهٔ $[t,t+h]$
- ج) $P_{ii}(h) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h)$
  - دقیقا بودن زاد و مرگ در بازهٔ $[t,t+h]$
- د) $P_{ij}(0) = \delta_{ij}$
- هـ)
  - $\mu_0 = 0, \lambda_0 > 0,$
  - $\mu_i, \lambda_i > 0, i = 1,2,\ldots$
-



فرایند زاد و مرگ

ماتریس «مولد سخت‌کوچک» فرایند

λ_i آهنگ زاد سخت‌کوچک

μ_i آهنگ زاد سخت‌کوچک

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \lambda_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

اصول ۱ و ۲ با فرض اینکه با شروع از حالت **i** در بازه‌های کوچک زمانی احتمال افزایش یا کاهش جمعیت با یک اساسا متناسب با طول بازه

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) \leq ۱$$

استفاده از خاصیت مارکوفی،امکان اشتقاق معادلات چپمن-کولمولگوف

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(s)$$

رفتار وابسته به زمان فزم

داشتن $j > 0$ عضو در زمان $t + h$ یا $X(t + h) = j$

- ممکن در صورت رخداد یکی از پیشامدهای زیر
  - اندازهٔ جمعیت در زمان t برابر j و عدم رخداد زاد و مرگ در بازه $(t,t + h)$.
  - اندازهٔ جمعیت در زمان t برابر $j - ۱$ و رخداد صرفا یک زاد در بازه $(t,t + h)$.
  - اندازهٔ جمعیت در زمان t برابر $j + ۱$ و رخداد صرفا یک مرگ در بازه $(t,t + h)$.
    - دوبه‌دو مجزا
- بقیه موارد دارای احتمال ناچیز $o(h)$
- پس

$$p_j(t + h) = p_j(t)P_{j,j}(h) + p_{j-۱}(t)P_{j-۱,j}(h) + p_{j+۱}(t)P_{j+۱,j}(h) + o(h), j \geq ۱$$

  - $j = 0$

$$p_0(t + h) = p_0(t)P_{0,0}(h) + p_۱(t)P_{۱,0}(h) + o(h)$$

- جاگذاری مقادیر متناظر

$$p_j(t + h) = p_j(t)\left(۱ - \lambda_j h - \mu_j h\right) + p_{j-۱}(t)\lambda_{j-۱}h + p_{j+۱}(t)\mu_{j+۱}h + o(h)$$

  - $j = 0$

$$p_0(t + h) = p_0(t)(۱ - \lambda_0 h) + p_۱(t)\mu_۱ h + o(h)$$

رفتار وابسته به زمان فزم

- جاگذاری مقادیر متناظر

$$\frac{p_j(t+h)-p_j(t)}{h}=\begin{cases}-p_j(t)\left(\lambda_j+\mu_j\right)+p_{j-1}(t)\lambda_{j-1}+p_{j+1}(t)\mu_{j+1}+\dfrac{o(h)}{h}, j\geq 1\\ -p_0(t)\lambda_0+p_1(t)\mu_1+\dfrac{o(h)}{h}, j=0 \qquad , j=0\end{cases}$$

- $h\to 0$

$$p'_j(t)=\begin{cases}-p_j(t)\left(\lambda_j+\mu_j\right)+p_{j-1}(t)\lambda_{j-1}+p_{j+1}(t)\mu_{j+1}, j\geq 1\\ -p_0(t)\lambda_0+p_1(t)\mu_1, j=0 \qquad , j=0\end{cases}$$

رفتار حدی فرایندهای زاد و مرگ

سختی و پیچیدگی پاسخ معادلات دیفرانسیلی

- اما حالت حدی داری رفتاری نرم‌تر
- رفتار حدی حالت j

$$\pi_j = \underset{t\to\infty}{\text{حد}} P(X(t)=j) = \underset{t\to\infty}{\text{حد}} p_{j(t)}$$

- تفسیرهای π_j در صورت ارگودیک بودن
  - احتمال اینکه جمعیت دارای j عضو در زمان‌های دور
  - درصدی از زمان بودن و سپریدن فرایند در حالت j
- نیاز به بررسی بازگشتی مثبت بودن فرزم جهت داشتن رفتار حدی
  - سپس محاسبهٔ احتمالات با ضابطهٔ بالا
- روش دیگر در ابتدا محاسبهٔ احتمال $\boldsymbol{\pi}$ با استفاده از روش بالا
  - سپس بررسی مناسب بودن $\boldsymbol{\pi}$ به مثابهٔ بردار احتمال

رفتار حدی فرایندهای زاد و مرگ

با فرض وجود و مثبت بودن حدها

- میل احتمال هر حالت j به π_j
  - پس حد مشتق با میل زمان به بی‌نهایت میل به صفر

$$\underset{t\to\infty}{\text{حد}}\, p_{j(t)} = \pi_j$$
$$\underset{t\to\infty}{\text{حد}}\, p'_{j(t)} = 0$$

- جاگذاری حدها در معادلات چپمن-کولمولگروف

$$p'_j(t) = \begin{cases} -p_j(t)(\lambda_j + \mu_j) + p_{j-1}(t)\lambda_{j-1} + p_{j+1}(t)\mu_{j+1}, j \geq 1 \\ -p_0(t)\lambda_0 + p_1(t)\mu_1, j = 0 \qquad\qquad , j = 0 \end{cases}$$

$$0 = -\pi_j(\lambda_j + \mu_j) + \pi_{j-1}\lambda_{j-1} + \pi_{j+1}\mu_{j+1}, j \geq 1$$
$$0 = -\pi_0\lambda_0 + \pi_1\mu_1, \qquad\qquad , j = 0$$

رفتار حدی فرایندهای زاد و مرگ

$$0 = -\pi_j(\lambda_j + \mu_j) + \pi_{j-۱}\lambda_{j-۱} + \pi_{j+۱}\mu_{j+۱}, j \geq ۱$$
$$0 = -\pi_0\lambda_0 + \pi_۱\mu_۱, \qquad , j = 0$$

- یا

$$\begin{cases} 0 = \mu_۱\pi_۱ - \lambda_0\pi_0 \\ 0 = \lambda_0\pi_0 + \mu_۲\pi_۲ - (\lambda_۱ + \mu_۱)\pi_۱ \\ 0 = \lambda_۱\pi_۱ + \mu_۳\pi_۳ - (\lambda_۲ + \mu_۲)\pi_۲ \\ 0 = \lambda_۲\pi_۲ + \mu_۴\pi_۴ - (\lambda_۳ + \mu_۳)\pi_۳ \\ \vdots \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} 0 = \mu_۱\pi_۱ - \lambda_0\pi_0 \\ \mu_۱\pi_۱ - \lambda_0\pi_0 = \mu_۲\pi_۲ - \lambda_۱\pi_۱ \\ \mu_۲\pi_۲ - \lambda_۱\pi_۱ = \mu_۳\pi_۳ - \lambda_۲\pi_۲ \\ \mu_۳\pi_۳ - \lambda_۲\pi_۲ = \mu_۴\pi_۴ - \lambda_۳\pi_۳ \\ \vdots \end{cases}$$

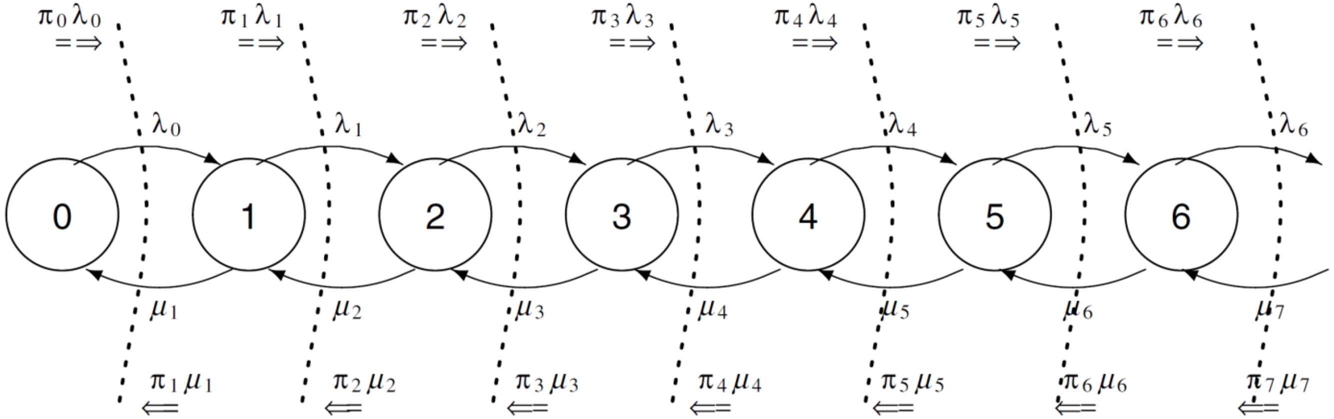
یا

$$\begin{cases} 0 = \mu_۱\pi_۱ - \lambda_0\pi_0 \\ 0 = \mu_۲\pi_۲ - \lambda_۱\pi_۱ \\ \mu_۲\pi_۲ - \lambda_۱\pi_۱ = \mu_۳\pi_۳ - \lambda_۲\pi_۲ \\ \mu_۳\pi_۳ - \lambda_۲\pi_۲ = \mu_۴\pi_۴ - \lambda_۳\pi_۳ \\ \vdots \end{cases} \overset{*}{\Rightarrow} \begin{cases} 0 = \mu_۱\pi_۱ - \lambda_0\pi_0 \\ 0 = \mu_۲\pi_۲ - \lambda_۱\pi_۱ \\ 0 = \mu_۳\pi_۳ - \lambda_۲\pi_۲ \\ 0 = \mu_۴\pi_۴ - \lambda_۳\pi_۳ \\ \vdots \end{cases} \overset{*}{\Rightarrow} \begin{cases} \lambda_0\pi_0 = \mu_۱\pi_۱ \\ \lambda_۱\pi_۱ = \mu_۲\pi_۲ \\ \lambda_۲\pi_۲ = \mu_۳\pi_۳ \\ \lambda_۳\pi_۳ = \mu_۴\pi_۴ \\ \vdots \end{cases}$$

رفتار حدی فرایندهای زاد و مرگ

$$
\begin{cases}
0 = \mu_{۱}\pi_{۱} - \lambda_0\pi_0 \\
0 = \mu_{۲}\pi_{۲} - \lambda_{۱}\pi_{۱} \\
\mu_{۲}\pi_{۲} - \lambda_{۱}\pi_{۱} = \mu_{۳}\pi_{۳} - \lambda_{۲}\pi_{۲} \\
\mu_{۳}\pi_{۳} - \lambda_{۲}\pi_{۲} = \mu_{۴}\pi_{۴} - \lambda_{۳}\pi_{۳} \\
\vdots
\end{cases}
\overset{*}{\Rightarrow}
\begin{cases}
0 = \mu_{۱}\pi_{۱} - \lambda_0\pi_0 \\
0 = \mu_{۲}\pi_{۲} - \lambda_{۱}\pi_{۱} \\
0 = \mu_{۳}\pi_{۳} - \lambda_{۲}\pi_{۲} \\
0 = \mu_{۴}\pi_{۴} - \lambda_{۳}\pi_{۳} \\
\vdots
\end{cases}
\overset{*}{\Rightarrow}
\begin{cases}
\lambda_0\pi_0 = \mu_{۱}\pi_{۱} \\
\lambda_{۱}\pi_{۱} = \mu_{۲}\pi_{۲} \\
\lambda_{۲}\pi_{۲} = \mu_{۳}\pi_{۳} \\
\lambda_{۳}\pi_{۳} = \mu_{۴}\pi_{۴} \\
\vdots
\end{cases}
$$

مشاهدهٔ نمودار جریان فزم



رفتار حدی فرایندهای زاد و مرگ

$$\begin{cases}\lambda_0\pi_0 = \mu_۱\pi_۱\\ \lambda_۱\pi_۱ = \mu_۲\pi_۲\\ \lambda_۲\pi_۲ = \mu_۳\pi_۳\\ \lambda_۳\pi_۳ = \mu_۴\pi_۴\\ \vdots\end{cases}$$

یا

$$\lambda_j\pi_j = \mu_{j+۱}\pi_{j+۱}$$

یا

$$\pi_{j+۱} = \frac{\lambda_j}{\mu_{j+۱}}\pi_j$$

یا

$$\begin{cases}\pi_۱ = \frac{\lambda_0}{\mu_۱}\pi_0\\ \pi_۲ = \frac{\lambda_۱}{\mu_۲}\pi_۱\\ \pi_۳ = \frac{\lambda_۲}{\mu_۳}\pi_۲\\ \pi_۴ = \frac{\lambda_۳}{\mu_۴}\pi_۳\\ \vdots\end{cases} \overset{*}{\Rightarrow} \begin{cases}\pi_۱ = \frac{\lambda_0}{\mu_۱}\pi_0\\ \pi_۲ = \frac{\lambda_0}{\mu_۱}\frac{\lambda_۱}{\mu_۲}\pi_0\\ \pi_۳ = \frac{\lambda_0}{\mu_۱}\frac{\lambda_۱}{\mu_۲}\frac{\lambda_۲}{\mu_۳}\pi_0\\ \pi_۴ = \frac{\lambda_0}{\mu_۱}\frac{\lambda_۱}{\mu_۲}\frac{\lambda_۲}{\mu_۳}\frac{\lambda_۳}{\mu_۴}\pi_0\\ \vdots\end{cases} \overset{*}{\Rightarrow} \pi_j = \frac{\lambda_0\lambda_۱\ldots\lambda_{j-۱}}{\mu_۱\mu_۲\ldots\mu_j}\pi_0 \overset{*}{\Rightarrow} \boxed{\pi_j = \pi_0\prod_{k=0}^{j-۱}\frac{\lambda_k}{\mu_{k+۱}}, j = ۱, ۲, \ldots}$$

رفتار حدی فرایندهای زاد و مرگ

$$\pi_j = \pi_0 \prod_{k=0}^{j-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}, j = 1, 2, \ldots$$

همچنین

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

پس

$$\pi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\pi_0 \prod_{k=0}^{j-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} \right) = 1$$

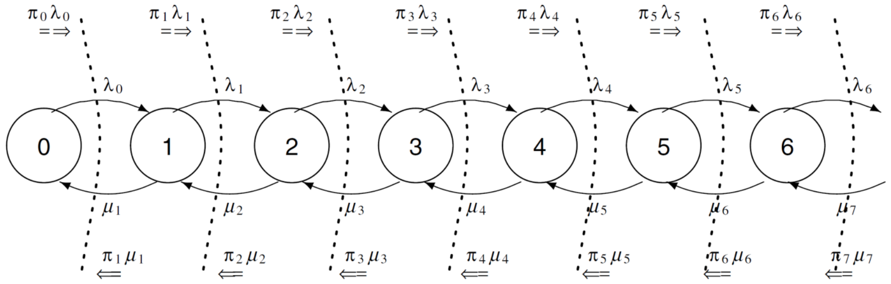
یا

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\prod_{k=0}^{j-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} \right)}$$

معادلهٔ پایه در نظریه صف مقدماتی

رفتار حدی فرایندهای زاد و مرگ

$$\pi_0 = \frac{۱}{۱ + \sum_{j=۱}^{\infty}\left(\prod_{k=0}^{j-۱}\frac{\lambda_k}{\mu_{k+۱}}\right)}$$

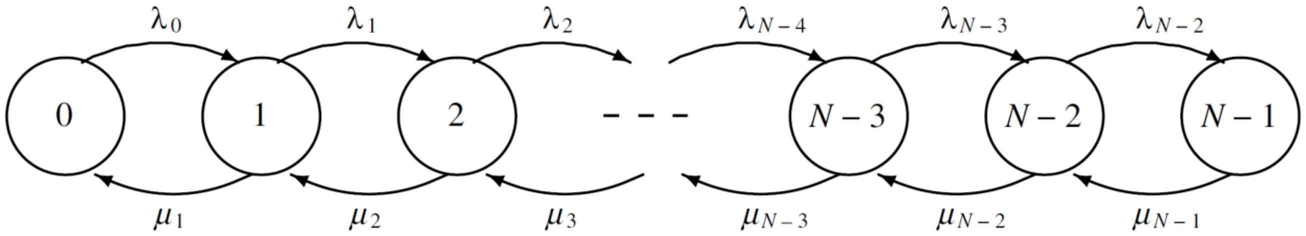


- بررسی وجود حد رفتاری
  - وجود حد کاهش‌ناپذیر
  - مقادیر π_j مثبت و غیر صفر در صورت بازگشتی مثبت بودن
    - فرایند کاهش‌ناپذیر اگر و فقط اگر میزان مرگ و تولد غیرصفر باشد یا

$$\lambda_j > 0, \mu_{j+۱} > 0, j = 0, ۱, ۲, \ldots$$

- جهت ضمانت مثبت بازگشتی بودن
  - $\pi_j > 0$
  - کافی است $\pi_0 > 0$
  - یا $۱ + \sum_{j=۱}^{\infty}\left(\prod_{k=0}^{j-۱}\frac{\lambda_k}{\mu_{k+۱}}\right) < \infty$
  - شرط کافی برقراری $\frac{\lambda_k}{\mu_k} < ۱$ به ازای $k \geq k_0$
  - تفسیر- اندازه جمعیت متناهی اگر میزان تولد اکیدا کمتر از میزان مرگ برای مواقعی که جمعیت به اندازه کافی بزرگ است
    - خرگوش‌ها
    - سیستم‌های منابع محدود

مثال



فزم با تعداد حالت متناهی

- پس $\lambda_{N-۱} = 0$
- فرض $\lambda_j = \mu_{j+۱}, j = 0,۱,۲, \ldots, N-۲$

- فزم حتما کاهش‌ناپذیر
- با متناهی بودن N بازگشتی مثبت
  - معادلهٔ تعادل حالت صفر

$$\lambda_0 \pi_0 = \mu_۱ \pi_۱ \Rightarrow \pi_0 = \pi_۱$$

  - بنابراین

$$\pi_j = \frac{۱}{N}, j = 0, ۱, ۲, \ldots, N-۱$$

  - در صورت $N \to \infty$؟

منابع

[زانلا]

[پینسکی]

[]

[]

[]